

**Prova scritta del concorso a n. 3 borse di studio per la Matematica
Collegio delle Scienze "Luciano Fonda"**

Anno Accademico 2008/2009

Trieste, 8 settembre 2008

Tema 1

1. La produzione di un certo prodotto costa 1800 Euro di spese fisse annue e 5 euro per ogni unità prodotta. Se il prezzo di vendita unitario è di 20 Euro e tutti i beni prodotti vengono venduti, qual è il numero minimo di unità da produrre nell'anno per non avere profitto negativo?
2. La successione di numeri reali a_1, a_2, a_3, \dots ha la proprietà che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 + 3n.$$

Calcolare, per ogni n , il valore di:

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1}$$

3. Un rettangolo di base 30 cm e altezza 10 cm è diviso in 3 quadrati di lato 10 cm. In quanti modi diversi si possono colorare, con 8 colori, i 3 quadrati in modo che due quadrati adiacenti siano sempre di colore diverso?
4. Quale frazione p/q con p, q numeri di una sola cifra, primi tra loro, approssima meglio $13/19$?
5. Trovare tutte le soluzioni reali del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} xyz & = 0 \\ xy + yz + xz & = 0 \\ x + y^2 + z & = 1 \end{cases}$$

6. È dato un settore circolare di ampiezza 90° e raggio r . Qual è il raggio della circonferenza in esso inscritta (cioè tangente ai due raggi e all'arco che limitano il settore)?
7. Vale:

$$1X1 \cdot 1X2 \cdot 1X3 \cdot 1X4 \cdot 1X5 = 11Z87Y77ZYX$$

Dove X, Y e Z rappresentano ciascuno una cifra (tra 0 e 9). Calcolare X, Y e Z .

8. Si esponga brevemente ciò che si sa sulle rette parallele.

Risposte:

1. $15x \geq 1800 + 5x$ quindi $x \geq 120$

2. Vale:

$$a_n = \sum_{i=1}^n a_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_n = 2(n+1)$$

per cui $a_n/(n+1) = 2$ e quindi la somma vale $2n$.

3. Primo quadrato: 8 modi, secondo quadrato (8-1) modi, terzo quadrato (8-1) modi. Totale 392.

4. $2/3$.

5. Le sol. possibili sono: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, -1, 0)$.

6. Detto x il raggio deve essere $r - x\sqrt{2} = x$, da cui $x = r(\sqrt{2} - 1)$.

7. X deve essere 0 (nel prod.di sinistra c'è un $2 \cdot 5$). Allora i numeri al primo membro sono $101, \dots, 105$. dividendo entrambi i membri per 10 otteniamo al primo membro il prodotto $101 \cdot 51 \cdot 103 \cdot 104 \cdot 21$ che ha per ultima cifra 2. Quindi Y vale 2. Infine $Z = 5$, si trova perchè la somma delle cifre deve essere multiplo di 9.